Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006

SOLUŢII ŞI BAREMURI

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie M o mulţime cu n elemente şi $\mathcal{P}(M)$ mulţimea părţilor sale. Să se determine funcţiile $f : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, cu proprietăţile:

a) $f(A) \neq 0$, pentru $A \neq \emptyset$;

b) $f(A \cup B) = f(A \cap B) + f(A \Delta B)$, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(M)$, unde $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Soluţie. Presupunem că funcţia f satisface condiţiile din enunţ. Din b) obţinem

$$f(\emptyset \cup \emptyset) = f(\emptyset \cap \emptyset) + f(\emptyset \Delta \emptyset),$$

de unde $f(\emptyset) = 0$ .... 1 punct

Pentru $A, B \in \mathcal{P}(M)$, cu $A \subsetneq B$, avem, conform b)

$$f(B) = f(A \cup B) = f(A) + f(B \setminus A).$$

Din a) deducem $f(B \setminus A) \neq 0$, deci $f(B) > f(A)$ .... 2 puncte

Rezultă că pentru orice permutare $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ a mulţimii M are loc şirul de inegalităţi

$$0 = f(\emptyset) < f(\{\alpha_1\}) < f(\{\alpha_1, \alpha_2\}) < \ldots < f(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}).$$

Deoarece $f(A) \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\forall A \in \mathcal{P}(M)$, obţinem

$$f(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j\}) = j,$$

pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. .... 2 puncte

Concluzionăm că $f(A) = |A|$, $\forall A \in \mathcal{P}(M)$ (unde $|A|$ reprezintă numărul elementelor mulţimii A). .... 1 punct

Reciproc, funcţia de mai sus satisface condiţiile din enunţ.
.... 1 punct

Soluţia a doua.

E uşor de verificat că funcţia $f(A) = |A|$, $\forall A \in \mathcal{P}(M)$, satisface condiţiile din enunţ.

Reciproc, fie $f : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0,1,2,\ldots,n\}$ o funcţie care satisface a) şi b). Arătăm

$$f(A) \geq |A|, \ \forall A \in \mathcal{P}(M). \qquad (1)$$

Presupunem, prin reducere la absurd, contrariul şi notăm

$$k = \min\{|A| \,|A \in \mathcal{P}(M) \text{ şi } f(A) < |A|\}.$$

Alegem $A_0 \in \mathcal{P}(M)$ astfel încât $f(A_0) < |A_0| = k$. Deducem că $A_0 \neq \emptyset$ şi $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Fie $a \in A_0$. Din a), b) şi definiţia lui k obţinem

$$f(A_0) = f(A_0 \cup \{a\}) = f(\{a\}) + f(A_0 \diagdown \{a\}) \geq 1 + (k-1) = |A_0|,$$

contradicţie. Deci (1) este demonstrată.

Arătăm

$$f(A) \leq |A|, \ \forall A \in \mathcal{P}(M). \qquad (2)$$

Presupunem, prin reducere la absurd, că există $A \in \mathcal{P}(M)$ astfel încât $f(A) > |A|$. Atunci, conform b) şi (1), avem

$$f(M) = f(A \cup M) = f(A) + f(M \diagdown A) > |A| + |M \diagdown A| = n,$$

contradicţie.

Din (1) şi (2) rezultă $f(A) = |A|, \forall A \in \mathcal{P}(M)$.

Subiectul 2. Să se arate că, dacă $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atunci

$$\frac{\sin^n a + \sin^n b}{(\sin a + \sin b)^n} \geq \frac{\sin^n 2a + \sin^n 2b}{(\sin 2a + \sin 2b)^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcţia $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (\frac{1}{2} - t)^n + (\frac{1}{2} + t)^n$ este crescătoare deoarece

$$f_n(t) = 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} t^{2k}, \ \ t \geq 0.$$

....2 puncte

Fie $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (0,1)$ astfel încât $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$ şi $x_1 x_2 \leq y_1 y_2$. Arătăm că $x_1^n + x_2^n \geq y_1^n + y_2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Putem presupune, prin simetrie, $x_1 \leq x_2$ şi $y_1 \leq y_2$. Atunci, notând $t = \dfrac{1}{2} - x_1 = x_2 - \dfrac{1}{2} \geq 0$ şi respectiv $s = \dfrac{1}{2} - y_1 = y_2 - \dfrac{1}{2} \geq 0$, avem $\frac{1}{4} - t^2 = x_1 x_2 \leq y_1 y_2 = \frac{1}{4} - s^2$, deci $t \geq s \geq 0$. Rezultă

$$x_1^n + x_2^n = f_n(t) \geq f_n(s) = y_1^n + y_2^n, \ \ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

....3 puncte

Pentru $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, notăm

$$x_1 = \frac{\sin a}{\sin a + \sin b},\ x_2 = \frac{\sin b}{\sin a + \sin b},$$

$$y_1 = \frac{\sin 2a}{\sin 2a + \sin 2b},\ y_2 = \frac{\sin 2b}{\sin 2a + \sin 2b}.$$

Avem $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (0,1)$ şi $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$. Inegalitatea $x_1 x_2 \leq y_1 y_2$ este echivalentă cu

$$(\cos a - \cos b)^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos a \cos b - 1) \geq 0,$$

care este verificată pentru orice $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Aceasta încheie demonstraţia..........................2 puncte

Subiectul 3. Să se demonstreze că printre termenii şirului definit prin $a_n = \left[n\sqrt{2}\right] + \left[n\sqrt{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, există o infinitate de numere pare şi o infinitate de numere impare.

Soluţie. Notăm $x_n = \left[n\sqrt{2}\right]$, $y_n = \left[n\sqrt{3}\right]$, $n \in N$. Avem $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n \in \{1, 2\}$, $\forall n \in N$................................1 punct

Presupunem, prin reducere la absurd, că există $k \in N$ astfel încât toate numerele a_n, $n \geq k$, să aibă aceeaşi paritate ....1 punct

Cum $2 \leq a_{n+1} - a_n \leq 4, \forall n \in N$, rezultă că $a_{n+1} - a_n \in \{2, 4\}$, $\forall n \geq k$...1 punct

Dacă $a_{n+1} - a_n = 2$, atunci $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 1$.

Dacă $a_{n+1} - a_n = 4$, atunci $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 2$ .. 1 punct

Rezultă $y_n - x_n = y_{n+1} - x_{n+1}$, $\forall n \geq k$, de unde $y_n - x_n = y_k - x_k$, $\forall n \geq k$..1 punct

Dar $y_n - x_n > n\sqrt{3} - 1 - n\sqrt{2}$, $\forall n \in N$, de unde obţinem

$$n < \frac{y_k - x_k + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}},$$

pentru orice $n \geq k$, absurd.

În concluzie, şirul $(a_n)_{n \in N}$ are o infinitate de termeni numere pare şi o infinitate de termeni numere impare...................2 puncte

Subiectul 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine n mulţimi A_i, $1 \leq i \leq n$, din plan, disjuncte două câte două, astfel încât:

a) pentru oricare cerc $\mathcal{C}$ din plan şi oricare $i \in \{1, 2, \ldots .n\}$, avem $A_i \cap Int\,(\mathcal{C}) \neq \emptyset$;

b) pentru orice dreaptă d din plan şi oricare $i \in \{1, 2, \ldots .n\}$, proiecţia mulţimii A_i pe d nu coincide cu d.

Soluţie. Considerăm în plan un reper cartezian Oxy. Identificăm axa Ox cu $\mathbb{R}$ şi planul cu $\mathbb{R}^2$.

Definim familia de n mulţimi numărabile şi dense in $\mathbb{R}$

$$B_i = \left\{ x + \sqrt[n]{2^{i-1}} \, | x \in \mathbb{Q} \right\}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Avem $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$ .... 2 puncte

Considerăm, în plan, familia de n mulţimi

$$A_i = B_i \times \mathbb{Q},$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ .... 1 punct

Pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, avem

$$A_i \cap A_j = (B_i \cap B_j) \times \mathbb{Q} = \emptyset.$$

.... 1 punct

Deoarece $\mathbb{Q}$ şi B_i sunt mulţimi dense în $\mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, condiţia a) este satifăcută .... 1 punct

Cum proiecţia lui A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pe o dreaptă d din plan are cardinalul mai mic sau egal decât cardinalul lui A_i, iar A_i este numărabilă, rezultă că proiecţia lui A_i pe dreapta d este cel mult numărabilă şi deci nu coincide cu întreaga dreaptă. Cerinţa b) este astfel satisfăcută.

.... 2 puncte